

# Nobelprijs voor markten met matching

De Nobelprijs Economie 2012 is toegekend aan Lloyd Shapley en Alvin Roth, voor “stabiele allocaties en de praktijk van market-design”, aldus het Nobelcomité. Meer concreet krijgen ze de prijs voor hun onderzoek naar markten met matching. Dat werk zorgt ervoor dat echtgenoten, coassistenten, scholieren en nieren op de juiste plaats terecht komen.

**MARCO HAAN**  
Universitair hoofd-  
docent aan de Rijks-  
universiteit Groningen

Voor buitenstaanders zal de keuze van het Nobelcomité als een verrassing kunnen komen. Uit het publieke debat ontstaat immers al snel de indruk dat alle economen zich met macro-economie bezighouden. Maar vrijwel al het interessante academische werk van de afgelopen decennia ligt juist op het gebied van de micro-economie. Een ander wijdverbreid misverstand is dat economie over geld zou gaan. Het aardige van het werk van de Nobelprijswinnaars van dit jaar is juist dat zij markten analyseren waarop geld geen rol speelt.

## DE THEORIE VAN TWEEZIJDIGE MATCHING

In 1962 formuleerden Lloyd Shapley en David Gale het volgende probleem (Shapley en Gale, 1962). Stel dat we  $n$  mannen en  $n$  vrouwen aan elkaar willen koppelen. Elke vrouw kan een voorkeursordening geven van alle mannen, en elke man kan een voorkeursordening geven van alle vrouwen. Is er dan een methode die garandeert dat er altijd  $n$  stabiele koppels ontstaan, in de zin dat er geen man en vrouw zijn die allebei een voorkeur voor elkaar hebben boven de partner die ze door het algoritme wordt toegewezen? Shapley and Gale laten zien dat dat inderdaad het geval is, en noemen die methode het *deferred acceptance algorithm*, ofwel het algoritme van uitgestelde acceptatie.

Dat werkt als volgt. In de eerste ronde doet elke man een aanzoek aan zijn favoriete vrouw. Vrouwen die een aanzoek hebben gekregen, houden het aanzoek van de beste partij in beraad, en verwerpen eventuele andere aanzoeken. Wie een aanzoek krijgt van haar favoriete man, accepteert natuurlijk meteen. In de tweede ronde doen de afgewezen mannen een nieuw aanzoek. Opnieuw houden vrouwen het aanzoek van de beste partij in beraad, verwerpen ze mindere aanzoeken, en accepteren ze een aanzoek van de favoriete man die nog beschikbaar is. Dit proces gaat door totdat alle vrouwen aan de man zijn.

Een voorbeeld. Stel, er zijn vier mannen (A, B, C en D) en vier vrouwen (1, 2, 3 en 4). Man A heeft een voorkeur voor vrouw 2. Zijn tweede keus is mevrouw 3, gevolgd door 1, en ten slotte 4. In tabel 1 is dat te zien als A:2314. De voorkeuren van de anderen zijn op een soortgelijke manier weergegeven.

Uit de tabel blijkt bijvoorbeeld dat mevrouw 3 een voorkeur heeft voor meneer D; haar tweede keus is C, haar derde keus is A, en haar laatste keus is B.

Hoe gaat in dit geval het algoritme in zijn werk? In de eerste ronde doet elke man een aanzoek aan zijn favoriete vrouw: A en C aan mevrouw 2, B en D aan mevrouw 1. vervolgens kijken alle dames naar hun opties. Mevrouw 1 heeft

## Hypothetische voorkeursordeningen

TABEL 1

Voorkeur van mannen	Voorkeur van vrouwen
A:2314	1:ABCD
B:1342	2:ACBD
C:2341	3:DCAB
D:1423	4:BDCA

twee aanzoeken liggen. Haar eerste keus, A, zit daar niet bij. Het aanzoek van D (haar laatste keus) kan ze zonder meer afwijzen, want ze heeft al een betere optie (B, haar tweede keus). Het aanzoek van B wordt dus in beraad gehouden. En mevrouw 2? Zij heeft een aanzoek gekregen van haar favoriete man en gaat met hem in zee. Meneer D wijst zij af.

In de tweede ronde zijn A en 2 van de markt. C en D zijn afgewezen en doen allebei een nieuw aanzoek, nu aan hun tweede keus: C aan 3, D aan 4. Voor zowel 3 als 4 is dat niet hun eerste keus. Zij houden het aanzoek dus in beraad. Maar mevrouw 1 had nog een aanzoek van B liggen. Nu A al getrouwd is, is B van alle nog beschikbare mannen haar favoriet. Zij accepteert dus alsnog zijn aanzoek en weer verlaat een gelukkig stel de markt.

Er zijn nu nog twee mannen en twee vrouwen over. Mevrouw 3 zit nog steeds stilletjes te hopen op een aanzoek van D. Mevrouw 4 weet dat haar favoriet, B, inmiddels van de markt is en accepteert het aanzoek van haar tweede keus, D. Beter zal ze het immers niet krijgen. En dat betekent dat 3 en C het met elkaar zullen moeten doen.

De paren die tot stand komen zijn dus A-2, B-1, C-3 en D-4. Het is eenvoudig in te zien dat dit een stabiele matching is. Stel bijvoorbeeld dat vrouwen die niet hun eerste keus hebben gekregen een laatste wanhopige poging doen alsnog hun favoriete man aan de haak te slaan. 1 polst dus nog eens bij A. Maar helaas, A heeft al zijn eerste keus 2, en zal die zeker niet opgeven voor 1. Ook 3 en 4 zullen er niet in slagen hun favoriete mannen (D respectievelijk B) over te halen om hun huidige echtgenotes (4 respectievelijk 3) voor hen te dumpen.

### DE PRAKTIJK VAN TWEEZIJDIGE MATCHING

Bovenstaande is natuurlijk een zuiver theoretische en academische exercitie. Daaruit kan de indruk ontstaan dat het algoritme in de praktijk volstrekt nutteloos is. Niets is minder waar. Roth (1984) bestudeerde de toewijzing van coassistenten aan ziekenhuizen in de Verenigde Staten. Dat is een probleem dat er precies zo uitziet als het huwelijksprobleem van Gale en Shapley, zoals die auteurs in hun artikel ook aangaven. Studenten hebben voorkeuren voor de ziekenhuizen waarin ze hun coassistenten willen lopen. Ziekenhuizen hebben voorkeuren voor studenten.

Vlak na de Tweede Wereldoorlog zagen Amerikaanse medici in dat het toenmalige systeem van het toewijzen van coassistenten aan ziekenhuizen niet werkte. Dat leidde tot een nieuwe opzet van deze markt aan het begin van de jaren vijftig, waarbij zowel studenten als ziekenhuizen werd gevraagd naar een voorkeurslijstje, en de uiteindelijke toewijzing tot stand kwam op basis van een matching-algoritme. En verbazend genoeg, zo ontdekte Roth, was dat systeem precies hetzelfde als wat Gale en Shapley tien jaar later voorstelden: uitgestelde acceptatie.

Waarom is het zo belangrijk dat er een algoritme wordt gebruikt dat leidt tot een stabiele matching? Met andere woorden, waarom laten we ziekenhuis en student niet gewoon een stagecontract tekenen op het moment dat ze elkaar wel zien zitten? Ook daar gaat Roth (1991) uitgebreid op in. Allereerst: juist als het systeem leidt tot een stabiele matching, heeft niemand een prikkel om buiten het systeem om te gaan. Leidt een systeem niet tot stabiele matching, dan is het resultaat vaak chaos.

Terug naar het voorbeeld in tabel 1, waarbij letters nu staan voor ziekenhuizen, en cijfers voor studenten. Ziekenhuis D aast op student 1 en doet daarom al in een vroeg stadium een aanbod. Om te voorkomen dat de student wordt weggekaapt door een concurrent wordt hij flink onder druk gezet. Als hij niet binnen 1 dag reageert, vervalt het aanbod (een *exploding offer*). Uiteraard heeft ziekenhuis B net zo'n prikkel en probeert het student 1 dus nog eerder te strikken (*unravelling*). Uiteindelijk loopt het helemaal uit de hand. Roth documenteert gevallen waarin studenten al twee jaar van tevoren een plek kregen aangeboden, wanneer ziekenhui-

## Leidt een systeem niet tot stabiele matching, dan is het resultaat vaak chaos

zen nog niet eens weten hoe goed de studenten nu echt zijn. In de praktijk zijn dergelijke gevallen van *unravelling* en *exploding offers* schering en inslag bij een systeem dat niet leidt tot stabiele matching. In de voetbalwereld bijvoorbeeld, waar de jacht op talent er eerder dit jaar toe leidde dat FC Barcelona een zesjarig Braziliaans talentje contracteerde. Bij stabiele matching treden die problemen niet op. Dan weet een ziekenhuis of voetbalclub dat het uiteindelijk een geschikte kandidaat krijgt en hoeft niemand bang te zijn dat ze het achteraf beter hadden kunnen doen.

Toch bleken er problemen met het gebruik van het algoritme bij de toewijzing van coassistentenplaatsen in de Verenigde Staten. Ironisch genoeg werd dat met name veroorzaakt door de huwelijksmarkt. Steeds meer studenten vonden tijdens hun studie de ware en hadden een sterke voorkeur om hun coschappen te lopen in hetzelfde ziekenhuis als hun echtgenoot. Dergelijke complementariteiten compliceren het matching proces. Roth paste het algoritme aan voor dergelijke gevallen, wat leidde tot het Roth-Peranson-algoritme, dat inmiddels op tientallen markten in de Verenigde Staten wordt gebruikt.

### DE THEORIE VAN EENZIJDIGE MATCHING

Tot nu toe hadden we het over tweezijdige matching; een situatie waarin beide kanten van de markt (mannen en vrouwen, ziekenhuizen en studenten) allebei hun voorkeuren hebben. Een andere klasse van problemen is die van eenzijdige matching, waarbij maar één kant voorkeuren heeft. Denk bijvoorbeeld aan het herverdelen van kamers in een studentenhuis. Studenten hebben voorkeuren voor kamers. Maar kamers niet voor studenten.

Ook de oplossing van dit probleem is verbonden met de naam van Lloyd Shapley. In Shapley en Scarf (1977) bestudeerde hij het *Top Trading Cycle*-algoritme. Dat werkt als volgt. Zet  $n$  punten in een figuur. Die punten vertegenwoordigen zowel de kamers als hun huidige eigenaar. Zet nu een

pijl in de figuur van elke eigenaar naar de kamer die zijn voorkeur heeft. Ontstaan er in de figuur cycli van pijlen die naar elkaar wijzen (en er zal altijd ten minste één zo'n cyclus zijn), dan kan iedereen in die cyclus doorgeschoven worden naar zijn favoriete kamer en begint de procedure opnieuw. De uitkomst van dit algoritme is een stabiele allocatie.

Stel bijvoorbeeld dat er vier studenten zijn. Student 1 heeft een voorkeur voor de kamer die nu van 4 is, 2 heeft een voorkeur voor die van 3, 3 voor die van 4, en 4 voor die van 1. Maken we de beschreven figuur, dan blijkt 1 te wijzen naar de kamer van 4, en 4 te wijzen naar de kamer van 1. We hebben dus een cyclus. 1 en 4 kunnen van kamer wisselen. In dit eenvoudige geval is dat genoeg voor een stabiele allocatie.

Meer ingewikkelde cycli zijn ook mogelijk. Stel dat 1 een voorkeur heeft voor de kamer van 4, 2 voor die van 1, 3 voor die van 2, en 4 ook voor die van 2. Zetten we deze informatie in een figuur, dan zien we een cyclus ontstaan van 1 die wijst naar 4, 4 die wijst naar 2, en 2 die wijst naar 1. In dit geval kunnen we 1 dus laten doorschuiven naar de kamer van 4, 4 naar die van 2, en 2 naar die van 1. Opnieuw hebben we een *Top Trading Cycle*, en is de uiteindelijke allocatie stabiel.

#### DE PRAKTIJK VAN EENZIJDIGE MATCHING

Ook dit lijkt een nogal academische en theoretische exercitie, die voor de praktijk volstrekt nutteloos is. Maar opnieuw is niets minder waar. Roth vond met een aantal coauteurs een belangrijke toepassing op het gebied van niertransplantatie (Roth *et al.*, 2004).

In Nederland staan ruim 900 nierpatiënten op de wachtlijst voor een nieuwe nier. Vaak zit er niets anders op dan te wachten op de nier van een overleden donor. Maar sommige patiënten hebben een echtgenoot of familielid die bereid is om bij leven een nier af te staan aan hun naaste. Of dat ook echt mogelijk is, hangt af van veel factoren, zoals de bloedgroep van beide personen.

Stel nu dat zowel meneer A als meneer B een echtgenote heeft die bereid is een nier aan haar zieke man af te staan. De nier van mevrouw A past echter niet in het lichaam van meneer A, maar lijkt wel een goede kandidaat voor transplantatie naar meneer B. Tegelijkertijd vormt de nier van mevrouw B geen

match met meneer B, maar maakt deze wel een goede kans in het lichaam van meneer A. Een voor de hand liggende oplossing is dan een *cross-over*-transplantatie: mevrouw B doneert aan meneer A, terwijl mevrouw A doneert aan meneer B.

Maar er is weinig reden om te stoppen bij twee paren. Misschien zijn er ook situaties waarin de nier van mevrouw A past bij meneer B, die van mevrouw B past bij meneer C, en die van mevrouw C weer past bij meneer A. Inderdaad: deze situatie is een eenzijdig matching probleem. Stel dat we alle nierpatiënten met een incompatibele donor in één figuur zetten. Vanuit iedere patiënt trekken we een pijl naar elke patiënt met een donornier die bij de eerstgenoemde patiënt past. Ontstaan er in die figuur cycli, dan kunnen de betreffende nieren 'doorgeschoven' worden, net als de studentenkamers in het theoretische voorbeeld.

Dat is precies wat Roth gedaan heeft, met een wat verder verfijnd algoritme dat rekening houdt met de specifieke eigenschappen van het niertransplantatieprobleem. Bijvoorbeeld met het feit dat er ook nieren van overleden donoren beschikbaar komen, en dat er soms altruïstische donoren zijn die bereid zijn hun nier af te staan zonder dat daar een tegenprestatie tegenover staat. Inmiddels is het systeem op grote schaal ingevoerd in de Verenigde Staten. In februari leidde dat zelfs tot een keten van dertig transplantaties in zeventien ziekenhuizen in elf staten. (New York Times, 2012).

#### TOT SLOT

In commentaren op deze Nobelprijs werd Alvin Roth met name geprezen om zijn pragmatisme. Geconfronteerd met het feit dat er een wachtlijst is voor donornieren, zullen de meeste economen al snel constateren dat hier sprake is van een marktfalen en dat het probleem is opgelost als nieren vrij verhandelbaar zijn, om vervolgens over te gaan tot de orde van de dag. Maar Roth deed iets anders; hij accepteerde het feit dat een vrije handel in nieren voor velen ethisch gezien een stap te ver is, en ging aan de slag om een systeem op te zetten dat zo goed mogelijk werkt onder de randvoorwaarde dat er niet voor nieren betaald mag worden. Daarmee werd hij een van de weinige economen die aantoonbaar mensenlevens heeft gered. Zijn theoretische werk kent hetzelfde pragmatisme; vaak gaat het niet om het vinden van een systeem dat perfect werkt, zoals bij economische theorie meestal het geval is, maar om het vinden van een systeem dat zo goed mogelijk werkt.

Het werk van Shapley, Roth en anderen heeft geleid tot een nieuw vakgebied: dat van *market design* ofwel marktontwerp. Daarbij gaat het om het opzetten van markten in specifieke situaties, die binnen de institutionele en ethische randvoorwaarden die gesteld worden zo goed mogelijk functioneren. Naast matching markets is het opzetten van veilingen van bijvoorbeeld radiofrequenties een belangrijk onderdeel van market design. Economen in dit vakgebied zijn niet uit op het ontwikkelen van grote, alomvattende theorieën, maar juist op het creëren van theoretisch goed onderbouwde marktinstituties die het beste halen uit een concrete situatie.

Ook in Nederland zijn er veel toepassingen voor dergelijke methodes, op de arbeidsmarkt bijvoorbeeld, of bij niertransplantaties. Maar ook het toewijzen van leerlingen aan scholen – een ander succesverhaal uit deze literatuur – gebeurt in veel gemeentes nog op een manier die geen stabiele matching oplevert. Er is dus nog veel te doen.

#### LITERATUUR

Gale, D. en L.S. Shapley (1962) College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, 69(1), 9–15.

New York Times (2012) *60 lives, 30 kidneys, all linked*. Artikel op [www.nytimes.com](http://www.nytimes.com), 18 februari.

Roth, A.E. (1984) The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. *Journal of Political Economy*, 92(6), 991–1016.

Roth, A.E. (1991) A natural experiment in the organization of entry level labor markets: Regional markets for new physicians and surgeons in the U.K. *American Economic Review*, 81(3), 415–440.

Roth, A.E., T. Sönmez en M.U. Ünver (2004) Kidney exchange. *Quarterly Journal of Economics*, 119(2), 457–488.

Shapley, L.S. en H. Scarf (1974) On cores and indivisibility. *Journal of Mathematical Economics*, 1(1), 23–37.