Verdelingsproblemen uit Bijbel en Talmoed

E.E.C. van Damme*

In dit artikel worden verdelingsproblemen uit de oudheid met behulp van de moderne speltheorie geanalyseerd. Salomo's oordeel blijkt voor verbetering vatbaar, maar faillissementsproblemen worden in de Babylonische Talmoed met een zeer doelmatige beslissingsregel opgelost.

In dit artikel beschouw ik enkele verdelingsproblemen uit de Oudheid in een modern perspectief.

In het eerste deel bespreek ik Salomo's wijze oordeel zoals verhaald in het Oude Testament. Het probleem dat hier behandeld wordt, is hoe de waarheid te achterhalen en de toewijzing van een kind aan de rechtmatige moeder te realiseren. Ik zal beargumenteren dat Salomo's methode imperfect is omdat zij niet werkt als de moeders rationeel zijn (in de moderne economische betekenis van het woord), en ik zal een methode aangeven die wel effectief is bij zulke rationele moeders.

In het tweede deel beschouw ik een aantal faillissementsproblemen zoals besproken in de Babylonische Talmoed. De Talmoed geeft voor een aantal specifieke numerieke voorbeelden aan hoe de boedel verdeeld zou moeten worden. Echter, de algemene regel die aan de uitkomsten ten grondslag ligt, wordt niet gegeven en is ook niet meteen intuïtief duidelijk. Ik laat zien dat er inderdaad een regel bestaat die de uitkomsten rationaliseert en dat er goede argumenten vóór deze regel te geven zijn.

In beide delen blijkt het belang van de speltheorie, de moderne wiskundige theorie voor het analyseren van conflictsituaties die in de economische wetenschap meer en meer toepassing vindt. De twee voorbeelden uit dit artikel laten zien tot wat voor inzichten deze theorie kan leiden[1].

Salomo's oordeel

In I Koningen 3:16-28 treffen we het prachtige verhaal aan dat de wijsheid van Salomo illustreert. De plot is als volgt: Twee vrouwen komen bij de koning. Een van de vrouwen vertelt dat zij beiden kort geleden een kind gebaard hebben. De zoon van de andere vrouw is kort na de geboorte gestorven en de ander heeft toen de kinderen verwisseld. De vrouw die het levende kind bij zich heeft, beweert natuurlijk dat de eerste liegt en dat het levende kind hààr zoon is. Om het gekrakeel der vrouwen te beëindigen, beveelt Salomo een zwaard te halen en hij zegt: "Snijdt het levende kind in tweeën en geef één helft aan de ene en één helft aan de andere". Daarop zegt de echte moeder tot de koning (omdat haar moedergevoel was opgewekt): "Met Uw verlof, mijn heer, geef haar het levende kind, maar doodt het in geen geval". De ander zegt: "Het zal noch van mij, noch van U zijn, snijdt door." Salomo beveelt dan het levende kind te geven aan die vrouw die bereid was het kind af te staan, omdat zij daardoor geopenbaard heeft de moeder te zijn.

Hoewel de vondst van Salomo schitterend is, moeten we, denk ik, toch vaststellen dat deze van beperkt belang is: rechters in de huidige tijd zouden niet ver komen als zij dezelfde methode zouden gebruiken om de waarheid aan het licht te brengen. Onechte moeders zouden snel leren op Salomo's voorstel precies zo te reageren als de echte moeder deed in het bijbelverhaal en de waarheid zou op deze manier niet aan het licht komen. Anders gezegd, de valse moeder in het bijbelverhaal was geen waardige tegenspeler van Salomo. Hoewel de Bijbel niet verhaalt hoe het met haar afloopt, mag men aannemen dat zij voor haar gedrag gestraft werd. Als zij rationeel was geweest, in het bijzonder als ze rationele verwachtingen had gehad, was ze niet aan de verwisseling begonnen.

Beschouwen we daarom de vraag of het in principe mogelijk is de waarheid te vinden als beide vrouwen rationeel zijn. Als we bereid zijn enige additionele aannames te maken, is het antwoord: "Ja".

* De auteur is werkzaam als hoogleraar bij CentER, verbonden aan de Katholieke Universiteit Brabant.

1. Het eerste voorbeeld heb ik overgenomen uit mijn intreerede *Informatie, incentives en economische efficiency*, Tilburg University Press, 1990. Zie ook John Moore, Implementation, contracts and renegotiation, hoofdstuk 5 in J.J. Laffont (red.), *Proceedings 6th world congress econometric society*, Cambridge University Press, 1992. Het tweede gedeelte van het artikel is gebaseerd op R.J. Aumann en M. Maschler, Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud, *Journal of Economic Theory*, 1985, nr. 36, blz. 195-213, en B. O'Neill, A Problem of Rights Arbitration from the Talmud, *Mathematical Social Sciences*, 1982, nr. 2, blz. 345-371.

Veronderstel, dat de waarde van het kind in geld uitgedrukt kan worden (een typisch economische maar daarom geen onzinnige aanname). Natuurlijke aannames zijn verder dat de echte moeder bereid is meer te betalen (immers het kind draagt de genen van de echte moeder; voor de andere vrouw heeft het kind geen reproduktieve waarde); en dat elke vrouw wel weet welke waarde zij zelf aan het kind toekent, maar dat zij dit niet weet van de ander. Wat Salomo in deze situatie kan doen, is het kind veilen bij opbod. Het is eenvoudig in te zien dat elke vrouw moet doorgaan met bieden tot de prijs bereikt is die gelijk is aan de waarde die zij aan het kind toekent. Het gevolg is, dat de echte moeder het kind krijgt voor een prijs die gelijk is aan de waarde die de valse moeder aan het kind toekent.

Natuurlijk is bovenstaande procedure niet echt bevredigend. Het is niet goed te verdedigen dat de echte moeder moet betalen om haar eigen kind te verkrijgen. Een kleine modificatie van de procedure kan dit euvel echter verhelpen. Stel dat Salomo beide vrouwen scheidt en hen (onafhankelijk en) simultaan het volgende keuzeprobleem voorlegt: men kan het kind claimen of niet. Als beiden het kind claimen, moeten beiden een cent betalen en wordt vervolgens het kind geveild; als slechts één vrouw het kind claimt, krijgt zij het kind; als beiden het kind niet willen, dan wordt het met gelijke kans aan een van beiden toegewezen. Onder de natuurlijke aanname dat de echte moeder minstens één cent meer voor het kind over heeft dan de andere vrouw, is het voor de echte moeder een dominantie strategie het kind te claimen; in het ongunstigste geval claimt de ander ook, maar dan wint de echte moeder de veiling. De valse moeder weet dat zij de valse moeder is, en dat de echte moeder rationeel is en dus het kind zal claimen. Het beste dat zij kan doen is het kind niet claimen, omdat ze anders een cent verliest. Bijgevolg krijgt de echte moeder het kind zonder te betalen.

Faillissementsproblemen

In de Babylonische Talmoed (Kethuboth 93a) worden drie faillissementssituaties besproken. Deze verschillen alleen in de grootte van de te verdelen boedel B. In elke situatie zijn er drie schuldeisers ($i = 1, 2, 3$) die elk een claim c_i op de boedel hebben. De claims zijn gelijkwaardig en onbetwistbaar. Het probleem is dat de boedel niet voldoende groot is om de claims volledig te honoreren. In concreto is het probleem ontstaan doordat een man gestorven is die met drie vrouwen getrouwd was. In het huwelijkscontract van de eerste vrouw staat dat zij recht heeft op 100 zuz, de tweede heeft een contract dat haar 200 zuz belooft en de derde heeft een contract van 300 zuz. De Talmoed bespreekt hoe een boedel van 100 zuz, respectievelijk 200 zuz, respectievelijk 300 zuz verdeeld zou moeten worden. De Talmoed stelt in elke situatie een verdeling voor zoals in de tabel is weergegeven.

In het eerste geval (B = 100) wordt de boedel gelijk over de schuldeisers verdeeld: elke eiser krijgt een derde van de boedel. In het derde geval (B = 300) wordt het principe van proportionele verdeling gehanteerd. De toewijzing is recht evenredig met de claim: schuldeiser i krijgt $300 * c_i/(c_1+c_2+c_3)$. Klaarblijkelijk worden dus twee geheel verschillende principes gehanteerd. Bovendien geldt dat de getallen voor het geval dat B = 200 met geen van beide principes te rijmen zijn: gelijk delen levert ieder 66 2/3 op en evenredig delen leidt tot 33 1/3, 66 2/3 en 100. Twee vragen werpen zich dus op: (i) hoe kunnen de getallen in de tweede rij van de tabel verklaard worden, en (ii) is er één principe dat de gehele tabel kan verklaren?

Tabel 1. Verdeling bij verschillende claims en boedels, in zuz

	Claims		
	c_1 100	c_2 200	c_3 300
Boedel B			
100	33 1/3	33 1/3	33 1/3
200	50	75	75
300	50	100	150

Een sleutel tot de antwoorden vinden we in een andere passage van de Talmoed (Baba Mezi'a 2a), waarin een tweepersoons verdelingsprobleem behandeld wordt. Het probleem is: twee mensen houden een gewaad vast. De een zegt: "Het is helemaal van mij", de ander zegt: "De helft is van mij (...)". De oplossing die de Talmoed presenteert is dat de eerste driekwart van het gewaad krijgt en de tweede een kwart. Deze verdeling is als volgt te rationaliseren: verdeel het gewaad in twee gelijke helften. Beide personen hebben een gelijke claim op de eerste helft. Het is dus redelijk deze helft eerlijk te delen. Op de tweede helft van het gewaad rust alleen een claim van de tweede eiser. Het is dus redelijk deze helft volledig aan hem toe te wijzen. Deze procedure leidt ertoe dat inderdaad eenvierde aan de eerste en drievierde aan de ander wordt toegewezen. De algemene regel in het tweepersoonsgeval is dus: *gelijke verdeling van het stuk dat door beiden geclaimd wordt.* Met andere woorden, stel $c_1 \leq B$ en $c_2 \leq B$, zodat beiden niet meer dan de gehele boedel claimen. Het deel $B - c_1$ wordt dan sowieso aan de tweede schuldeiser toegewezen en het deel $B - c_2$ aan de eerste. Het resterende deel $B-(B-c_1)-(B-c_2) = c_1+c_2-B$ wordt gelijk over beiden verdeeld. In totaal krijgt de eerste schuldeiser dus $B-c_2+(c_1+c_2-B)/2= (B+c_1-c_2)/2$ en de tweede $(B+c_2-c_1)/2$. In het volgende zullen we deze regel de 'regel van het betwiste gewaad' noemen[2].

Om bovenstaande regel te kunnen gebruiken in de situaties van de tabel moeten we een manier zien te vinden om een driepersoonsprobleem te reduceren tot een tweepersoonsprobleem. Welnu, dat kan op de volgende manier. Als de getallen uit de tabel werkelijk acceptabel zijn, dan is het voor de schuldeisers verschillend van i dus acceptabel om aan i het bedrag x_i uit de tabel te geven. Nadat zij dit gedaan hebben, hebben zij nog een boedel van $B - x_i$ over waaruit hun claims betaald moeten worden, en wel

2. In het geval dat $c_1>B$ of $c_2<B$ is het principe hetzelfde, maar komen de formules er iets anders uit te zien. Men moet dan c_i vervangen door $\min(B,c_i)$.

volgens de 'regel van het betwiste gewaad'. De vraag is dus of zoiets mogelijk is: Is er een verdeling te vinden die voor elk tweetal personen consistent is met de 'regel van het betwiste gewaad'? Met behulp van wat wiskunde kan men bewijzen dat het antwoord bevestigend is: er is precies één verdeling waarvoor dit geldt. Met andere woorden: er is precies één manier om de 'regel van het betwiste gewaad' consistent uit te breiden naar verdelingsproblemen met een willekeurig aantal schuldeisers.

Het opmerkelijke is nu dat de getallen in de tabel overeenkomen met de uitkomsten die door 'consistente uitbreiding' van de tweepersoonsregel gevonden worden. Ter illustratie zal ik laten zien dat de toewijzingen bij B = 200 inderdaad consistent zijn. Als we bij voorbeeld de eerste schuldeiser elimineren (door hem zijn toegewezen bedrag uit te betalen), dan houden we een boedel van B = 150 over waar claims van $c_2 = 200$ en $c_3 = 300$ op rusten. Volgens de 'regel van het betwiste gewaad' moet deze boedel gelijk over de twee schuldeisers verdeeld worden. Beiden krijgen dus 75 zoals in de tabel. Als we de tweede schuldeiser zijn deel (75) uitbetalen, dan houden we een boedel van 125 over met claims van 100 en 300. Het door beiden geclaimde gedeelte is nu 100. Dit wordt gelijk over beiden verdeel en de rest (25) gaat naar de derde schuldeiser. Een analoge redenering geldt als we de derde schuldeiser door uitbetaling elimineren. Samenvattend geldt dus: er is precies één consistente uitbreiding van de 'regel van het betwiste gewaad' en deze uitbreiding levert precies de uitkomsten van de tabel. Als we de tweepersoonsregel en het principe van de consistente uitbreiding accepteren, dan moeten we dus ook de verdelingen zoals in de tabel accepteren.

Er is nog een tweede manier om de verdelingen uit deze tabel te rechtvaardigen. De consistente uitbreiding van de tweepersoonsregel is de enige verdelingsregel die niet manipuleerbaar is door coalities van schuldeisers: als de boedel volgens deze regel verdeeld wordt, dan is het niet mogelijk dat twee (of meer) schuldeisers hun toewijzing uit de boedel verhogen door te fuseren en gezamenlijk één claim (die gelijk is aan de som van de individuele claims) in te dienen. Beschouw bij voorbeeld in het geval dat B = 200 een fusie van de tweede en derde schuldeiser. Deze fusie resulteert in een scheidingsprobleem met een boedel van B = 200 en $c_1 = 100$ en $c_{2,3} = 500$. De 'regel van het betwiste gewaad' geeft de coalitie 150 uit deze boedel, evenveel als de coalitie krijgt als ze niet samenspannen: een coalitie is niet lonend. Met elementaire wiskunde is te bewijzen dat deze laatste conclusie algemeen geldt. Bovendien leidt deze conclusie tot een eenvoudig recursief algoritme om in een willekeurige situatie de 'juiste' verdeling efficiënt te bepalen.

Ik zal het algoritme illustreren aan de hand van een ander verdelingsprobleem uit de Talmoed: Jacob is gestorven en zijn zoon Reuben produceert een testament waarin Jacob hem de hele nalatenschap belooft. Simeon produceert een testament dat hem de helft belooft, Levi een dat hem een derde toewijst en Judah een dat hem een vierde toewijst. Alle testamenten zijn voorzien van dezelfde datum en dus gelijkwaardig. Stel dat de boedel 480 waard is. In het algoritme beschouwen we eerst de kleinste schuldeiser (Judah) tegen een coalitie van zijn broers. Volgens de tweepersoonsregel krijgt Judah dan de helft van zijn claim, dus een achtste van de boedel, ofwel 60. De drie oudere broers krijgen samen 420. Om deze 420 te verdelen beschouwen we de coalitie van Reuben en Simeon tegen Levi. Volgens de tweepersoonsregel krijgt Levi een zesde van deze 420, dus 70, en blijft 350 over voor de twee oudere broers. Nog een laatste keer de tweepersoonsregel toepassend vinden we dat Simeon een kwart daarvan krijgt (87), terwijl Reuben drie vierde deel krijgt (262).

Speltheorie

We hebben de verdelingen uit de tabel op twee verschillende manieren gerationaliseerd. Hier kwam nauwelijks wiskunde aan te pas. Het zou echter verkeerd zijn te denken dat economische theorie en wiskundige technieken bij het vinden van de rechtvaardigingen geen enkele rol hebben gespeeld. Volgens Aumann en Maschler bestond hun onderzoeksproces dat tot bovenstaande resultaten leidde ruwweg uit de volgende fasen: (i) formuleer het faillissementsprobleem als een (coöperatief) spel, (ii) laat op dat spel een algemeen (wiskundig) oplossingsconcept los (in dit geval de nucleolus), en (iii) onderzoek welke consequenties dat concept heeft. Net als Marshall deed, hebben we in het bovenstaande de wiskunde geëlimineerd[3]. Echter, zoals Aumann/Maschler opmerken: "Without the game theory it is unlikely that we would have hit upon the analysis". Het algemene perspectief was nodig om het bijzondere aan de situatie te doorgronden.

Conclusie

In dit artikel heb ik gepoogd te laten zien dat moderne technieken nieuw licht kunnen doen schijnen op oude problemen. De economische theorie kan helpen bij schriftverklaring. De problemen waren van twee verschillende types. In het eerste deel van dit artikel was het informatieprobleem van het grootste belang: Welke mechanismen kunnen ervoor zorgen dat een efficiënte allocatie gerealiseerd wordt als informatie imperfect is? In het tweede deel gingen we meer in op allerlei fairness-aspecten die bij allocatieproblemen een rol spelen. Hoewel we onze voorbeelden aan de oudheid ontleenden, zal duidelijk zijn dat we vergelijkbare problemen ook heden ten dage nog frequent tegenkomen. Gelukkig zijn onze technieken om deze problemen te analyseren in de loop van de tijd iets verbeterd.

Eric van Damme

3. In een brief aan Bowley in 1906 omschreef Marshall zijn onderzoeksmethode als volgt: "(1) Use mathematics as a shorthand language rather than an engine of inquiry, (2) keep to them till you have done, (3) translate into English, (4) then illustrate by examples that are important in real life, (5) burn the mathematics. (6) If you can't succeed in (4), burn (3). This last I did often."