

**Bijlage bij Frijns, J.M.G., T.C.M.J. van de Klundert en A. van Nunen (2017)  
Pensioenbelegging te defensief in FTK-keurslijf. ESB, 102(4750), 272-274.**

We kiezen voor een zeer eenvoudig pensioenmodel met assets  $A$ , toezeggingen (of liabilities)  $L$  en een surplus  $S$ .  $L$  is de balanswaarde van de toezeggingen in de voorliggende jaren plus de waarde van de nieuwe toezeggingen in dat jaar. We veronderstellen dat de uitkering en nieuwe toezeggingen in enig jaar aan elkaar gelijk zijn.

Er geldt

$$\begin{aligned}(1) \quad S &= A - L \\(2) \quad A &= (1+y) A_{-1} \\(3) \quad L &= (1+g) L_{-1}\end{aligned}$$

De groei van de assets is exogeen, de actuariële waarde van  $L$  groeit met de gehanteerde rekenrente  $g$  maar dient zich ex-post aan te passen aan  $A$ .  $L_a$  is het bedrag waarmee  $L$  wordt aangepast.

***Onmiddellijke aanpassing***

De waardeontwikkeling van  $L$  en de jaarlijkse uitkering  $U$  kan worden afgeleid als functie van het rendement  $y$  op  $A$ . In het bijzondere geval dat  $L$  onmiddellijk wordt aangepast aan  $A$  geldt

$$(1) \quad L_a = (y-g) L_{-1}$$

De bewegingsvergelijking voor  $L$  wordt dan, daar  $A=L$ :

$$(2) \quad L = (1+g) L_{-1} + (y-g) L_{-1} = (1+y) L_{-1}$$

$L$  is de som van de contant gemaakte toezeggingen  $U_\tau$  per jaar, met  $(1+g)$  als disconteringsfactor.

$$(3) \quad L = CW(U_\tau) \text{ met}$$

De toezegging  $U_\tau$  wordt opgerent met de factor  $(1+g-d)$ , met  $d$  een constante

$$(4) \quad U_{\tau+1} = (1+g-d) U_\tau$$

Ofwel voor de Contante Waarde van de toezegging in jaar  $t+1$  op tijdstip  $t$

$$(5) \quad CW(U_{t+1,t}) = (1+g-d) / (1+g) U_t$$

De aanpassing van  $L$  conform (2) geldt gelijkelijk voor alle jaarlagen zodat na aanpassing de feitelijke uitkering in jaar  $t+1$  wordt

$$(6) U_{t+1} = (1+g + (y-g)) CW(U_{t+1,t}) = (1+y) CW(U_{t+1,t})$$

ofwel

$$(7) U_{t+1}/U_t \approx 1+y-d$$

### ***Vertraagd aanpassingsmechanisme***

In een vertraagde aanpassing wordt  $L$  jaarlijks aangepast als functie van  $S$ :

$$(8) L_a = \alpha S_{-1}$$

Substitutie van (2), (3) in (1) en toevoeging van de correctieterm  $L_a$  geeft een eenvoudige lineaire differentievergelijking in  $S$

$$(9) S = (1+y) A_{-1} - [(1+g)L_{-1} + \alpha S_{-1}]$$

Of, doordat  $L_{-1} = A_{-1} - S_{-1}$

$$(10) S = (y-g) A_{-1} + (1+g-\alpha) S_{-1}$$

Hetgeen na deling door  $A_{-1}$  geeft

$$(11) S/A_{-1} = (y-g) + (1+g-\alpha) S_{-1}/A_{-1}$$

Ofwel

$$(12) S/A = (y-g)/(1+y) + (1+g-\alpha)/(1+y) S_{-1}/A_{-1}$$

Zodat de evenwichtsooplossing voor  $S/A$  is, mits  $(1+g-\alpha) < (1+y)$ :

$$(13) (S/A)^* = (y-g)/(y-g+\alpha)$$