

# Dynamisch kiezen en spelen

Dynamische discrete keuze- en spelmodellen zijn onmisbaar bij het bestuderen van sociale zekerheid en werkloosheid, risicodrag van jongeren, mededingingsbeleid, innovatie en veel andere zaken. Mijn onderzoeksprogramma ontwikkelt methoden die het makkelijk maken deze modellen breed en effectief toe te passen.

## JAAP ABBRING

Hoogleraar aan de Universiteit van Tilburg



Ondersteund door een VICI-beurs van de NWO werkt Jaap Abbring met zijn studenten en collega's aan onderzoek naar de econometrie van dynamische discrete keuzen en spelen, met toepassingen op onder meer de empirische analyse van mededinging en marktstructuur.

**F**armaceutische bedrijven investeren veel in onderzoek naar en ontwikkeling van medicijnen (R&D), meestal in concurrentie met andere bedrijven. Zulke R&D-investeringen zijn uitermate risicovol: de farmaceut weet niet of hij erin zal slagen als eerste een goed medicijn op de markt te zetten. Lukt dit echter, dan kan hij, afhankelijk van de manier waarop intellectueel eigendom wordt beschermd en de medicijnmarkt is gereguleerd, kortere of langere tijd flinke winst maken op de verkoop van het medicijn.

Een overheid die deze markt wil reguleren staat voor een dilemma. Enerzijds is het optimaal het medicijn zo concurrerend mogelijk te laten aanbieden als het eenmaal ontwikkeld is. Anderzijds zullen bedrijven, als ze na succesvolle ontwikkeling van een medicijn te weinig winst kunnen maken, niet willen investeren in R&D en van de ontwikkeling af willen zien. Een goede beleidskeuze vergt kennis van de verwachte uitkomsten onder de verschillende mogelijke beleidsregimes. Voor zover deze regimes nieuw beleid of beleid in een nieuwe situatie betreffen, zijn historische gegevens niet direct informatief over de te verwachten uitkomsten. In plaats daarvan kan de beleidsmaker proberen uit historische gegevens te leren over de bepalende eigenschappen (ofwel primitieven) van de markt,

zoals de R&D-kosten en de winsten die behaald kunnen worden met de verkoop van het medicijn in verschillende beleidsregimes. Met kennis van deze primitieven kan hij dan mogelijk de uitkomsten van verschillende mogelijke beleidsregimes voorspellen en het beleid optimaliseren.

Het onderzoeksproject formaliseert dit probleem door de medicijnmarkt te modelleren als een dynamisch spel waarin bedrijven medicijnen moeten ontwikkelen voordat ze deze kunnen verkopen, in een door de overheid gekozen mededingingsregime. Het beoogt de fundamentele identificatievraag te beantwoorden in hoeverre het mogelijk is uit beschikbare historische gegevens te leren over de primitieven van dit spel en de effecten van fictief beleid, rekening houdend met eventuele heterogeniteit van (ofwel persistente verschillen tussen) bedrijven en markten. Het zal ook nieuwe methoden bieden om, binnen de zo ontdekte beperkingen op wat wel en niet kenbaar is, de primitieven empirisch te kwantificeren, bijvoorbeeld door ze te schatten. Tot slot zal het de evenwichtsuitkomsten – dynamische spelen hebben er vaak vele – voor gegeven marktprimitieven en beleidsregimes theoretisch in kaart brengen en methoden ontwikkelen om ze snel uit te rekenen. In het bijzonder kan zo het beleidsregime met de gewenste uitkomsten worden gezocht.

Het project is niet beperkt tot dit voorbeeld, maar richt zich in het algemeen op de econometrie van dynamische discrete keuzen (kader 1) door heterogene en strategisch interacterende agenten, zoals individuen of bedrijven. Dit project heeft niet alleen toepassingen in de industriële organisatie, maar ook in andere vakgebieden zoals de arbeids-, scholings- en verzekerings-economie. Het project bestudeert de theorie, identificatie, schatting en berekening van econometrische modellen die dynamische keuzen expliciet specificeren als de oplossingen van dynamische optimalisatiemodellen (wanneer er geen strategische interacties zijn) en dynamische spelen (wanneer er wel strategische interacties zijn). Het bouwt hierbij

**GRENSNUT**

In de rubriek 'Grensnut' beschrijven economen die een onderzoeksbeurs hebben ontvangen hun grensverleggende onderzoek. De rubriek beoogt te laten zien hoe economen met nieuwe benaderingen hiaten in de bestaande economische kennis invullen. De rubriek is een aanvulling op de rubriek 'Canon', waarin economen beschrijven wat we door de jaren heen geleerd hebben over een bepaald onderwerp.

voort op, integreert en generaliseert benaderingen in discrete (dus stapsgewijze) en continue tijd die tot dusver grotendeels afzonderlijk zijn ontwikkeld.

**ACHTERGROND**

De econometrie van dynamische discrete keuzen gaat op zijn minst terug tot Flinn en Heckman (1982). Zij ontwikkelden zoekmodellen van de arbeidsmarkt die nog steeds in allerlei varianten worden gebruikt in toegepast onderzoek. Flinn en Heckman werkten in continue tijd, maar merkten op dat hun analyse ook in discrete tijd herschreven kan worden. Desondanks hebben benaderingen in discrete tijd en in continue tijd zich sindsdien grotendeels onafhankelijk van elkaar ontwikkeld.

Veel van de eerste onderzoekers ontwikkelden modellen in discrete tijd. Miller (1984) modelleerde beroepskeuze, Wolpin (1984) bestudeerde voortplanting en kindersterfte en Pakes (1986) analyseerde de keuze om patenten te vernieuwen. Recent onderzoek richt zich op bijvoorbeeld scholings-, arbeids-, voortplantings- en zorgverzekeringskeuzen (Keane en Wolpin, 2009). Deze lijn van onderzoek gebruikt vaak een variant op een econometrisch model van Rust (1987; 1994), waarin agenten zogenaamde Markov-beslisproblemen (kader 1) oplossen. Een belangrijke aanname in het werk van Rust is dat agenten de toekomst niet beter kunnen voorspellen dan de econometrist. Dit sluit in het bijzonder uit dat er niet-waargenomen heterogeniteit is. In veel toepassingen ligt het voor de hand dat agenten wel meer weten over hun eigen toekomst dan de econometrist. Onderzoekers hebben dan ook op allerlei manieren Rusts model uitgebreid met niet-waargenomen heterogeniteit (Abbring en Heckman, 2007). Het uitrekenen en schatten van dit soort beslismodellen is doorgaans geen groot probleem. De belangrijkste lacune in dit deel van de literatuur is dat er betrekkelijk weinig bekend is over de identificatie van modellen met algemene niet-waargenomen heterogeniteit (Abbring, 2010).

In recenter onderzoek is de aandacht verlegd van dynamische discrete keuzemodellen zonder strategische interacties naar dynamische spelen in discrete tijd. Veel van dit onderzoek richt zich op toepassingen in de industriële organisatie en bouwt voort op het dynamische oligopolie-model van Ericson en Pakes (1995). In dit model kiezen bedrijven om de markt te betreden of te verlaten en is er onzekerheid over toekomstige winsten, onder meer door bedrijfsspecifieke productiviteitsschokken die bedrijven door investeringen kunnen beïnvloeden. In de Markov-perfekte evenwichten van dit model lost elk bedrijf een Markov-beslisprobleem op, gegeven de strategieën van de andere bedrijven. Dit betekent dat een aantal identificatieresultaten en econometrische methoden voor Markov-beslismodellen als dat van Rust (1987) kunnen

worden toegepast op dit soort spelen (Akerberg *et al.*, 2007, voor een overzicht). Een groot probleem is echter dat deze spelen doorgaans meerdere evenwichten hebben, die ook nog eens erg moeilijk te berekenen zijn. Dit frustrereert het schatten van deze modellen en maakt het lastig om een geschat model te gebruiken om beleidsinterventies door te rekenen (Doraszelski en Pakes, 2007).

Econometrisch onderzoek naar dynamische discrete keuzen in continue tijd heeft zich voornamelijk beperkt tot baanzoekmodellen als die van Flinn en Heckman (1982). In de eenvoudigste versie van zo'n zoekmodel krijgt een werkloze met willekeurige tussenpozen baanaanbiedingen. Bij elk aanbod moet de werkloze beslissen of hij het wil accepteren of niet. De optimale beslissing is doorgaans om elke baan die een loon biedt boven een bepaald 'reserveringsloon' te aanvaarden. Flinn en Heckman en latere onderzoekers hebben een reeks, vaak negatieve, identificatieresultaten specifiek voor dit soort zoekmodellen afgeleid. De modellen kunnen ook vrij eenvoudig geschat en uitgerekend worden.

Zoekmodellen impliceren een *hazard* (kader 1) voor het vinden van een baan, die mogelijk afhangt van de werkloosheidsduur en van de waargenomen en niet-waargenomen eigenschappen van de werkloze. Dit suggereert wellicht dat resultaten uit de omvangrijke literatuur over de identificatie en schatting van het *mixed-proportional-hazards*-model (MPH-model) van Lancaster (1979; kader 1) kunnen worden toegepast op zoekmodellen. Het MPH-model werd in eerste instantie ontwikkeld voor de analyse van werkloosheidsduren. Het is geen expliciet keuzemodel, maar specificereert de hazard direct in termen van de verstreken duur en de effecten van waargenomen en niet-waargenomen heterogeniteit. Helaas blijken zoekmodellen zelden te leiden tot de specifieke, multiplicatieve structuur van het MPH-model (Van den Berg, 2001; Eckstein en Van den Berg, 2007). De resultaten van dit model zijn dus niet direct bruikbaar voor de analyse van zoekmodellen.

In de economische theorie is veel aandacht voor dynamische discrete keuzemodellen waarin de baten van de diverse keuzen afhangen van een zogeheten Brownse beweging of een algemener Lévy-proces (kader 1). De eenvoudigste variant is een *optimal-stopping*-model, waarmee de keuze om een activiteit – zoals werkloosheid – te staken wordt gemodelleerd. Zulke modellen spelen een belangrijke rol in de financiële-optieliteratuur en de niet-financiële toepassing daarvan op zogenaamde *real options* (Dixit en Pindyck, 1994; Stokey, 2009). Een recent voorbeeld is het zoek- en rustwerkloosheidsmodel (Alvarez en Shimer, 2011). Er is echter nog weinig bekend over de empirische implementatie van dit soort modellen.

Tot slot is er een kleine, recente literatuur waarin de econometrie van spelen in continue tijd wordt bestudeerd. De

De auteur heeft verklaard dit artikel alleen te publiceren in ESB en niet elders

te publiceren in wat voor medium dan ook. Het is wel toegestaan om het artikel voor eigen gebruik en voor publicatie op een intranet van de werkgever van de auteur aan te wenden.

## Begrippen

KADER 1

**Browse beweging en Lévy-processen:** Een Lévy-proces is een stochastisch proces met onafhankelijke en gelijkverdeelde veranderingen over de tijd. Een Browse beweging is een Lévy-proces in continue tijd met normaal verdeelde veranderingen.

**Dynamische discrete keuzen:** Herhaalde keuzen uit een eindig aantal alternatieven over de tijd, waarbij de keuzen doorgaans onzekere effecten hebben op toekomstige uitkomsten en keuzen.

**Hazard:** Het equivalent in continue tijd van de kans dat iets gebeurt, gegeven dat het nog niet gebeurd is. Bijvoorbeeld, de kans dat een werkloze in de komende drie uur een baan vindt, gegeven dat hij nu nog werkloos is, is ongeveer drie maal zijn huidige baanvind-hazard per uur (dit wordt preciezer naarmate het tijdsinterval – hier drie uur – kleiner wordt).

**Markov-beslisprobleem:** Dynamisch keuzemodel waarin alle voor de keuzen relevante informatie over de toekomst besloten ligt in de huidige waarden van een beperkt aantal 'toestandsvariabelen'.

**Mixed-proportional-hazards-model:** Een door Lancaster (1979) geïntroduceerd econometrisch model voor de analyse van duren. In het voorbeeld van werkloosheidsduren specificeert het de hazard voor het verlaten van de werkloosheid als het product van het effect van de al verstreken werkloosheidsduur en de effecten van de waargenomen en niet-waargenomen eigenschappen van de werkloze.

Paula (2009) beschouwt een synchronisatiespel, ofwel een optimal-stopping-model waarin het voor een agent aantrekkelijker wordt te stoppen naarmate meer andere agenten zijn gestopt. De baten van stoppen in De Paula's model variëren over de tijd met een Browse beweging. Hij past dit toe op de keuze om te deserteren uit het leger van de Unie in de Amerikaanse Burgeroorlog. In deze toepassing kiest elke soldaat een optimaal moment om te deserteren (mogelijk nooit). Desertie van krijgsmaten kan het aantrekkelijker maken om zelf ook te deserteren. De belangrijkste identificatievraag is of deze oorzakelijke groepseffecten kunnen worden onderscheiden van gecorreleerd gedrag door heterogeniteit (wellicht zoeken lafaards elkaar op) of gezamenlijke schokken. Honoré en De Paula (2010) beantwoorden deze vraag voor een eenvoudiger model, waarin de baten van stoppen geen Browse beweging maar een zeker pad volgen. Deze vereenvoudiging maakt het mogelijk resultaten uit de MPH-literatuur toe te passen om identificatie van het synchronisatiespel met heterogeniteit te onderzoeken. Het is voor ons project interessant dat de specificatie in continue tijd zowel de theorievorming (Honoré en De Paula, 2010) als het berekenen van de modeluitkomsten (Doraszelski en Judd, 2005) vergemakkelijkt.

## NIEUW ONDERZOEK

Uit dit overzicht van de bestaande literatuur komen vier belangrijke knelpunten naar voren. Ten eerste is er nog maar weinig bekend over de identificatie van modellen met algemene heterogeniteit. Ten tweede hebben dynamische spelen, in bijzonder die in discrete tijd, vaak meerdere oplossingen die moeilijk theoretisch te karakteriseren en te berekenen zijn. Ten derde heeft de omvangrijke theoretische literatuur over discrete keuzen in continue tijd de weg naar de data nog nauwelijks gevonden, met uitzondering van zoekmodellen. Tot

slot zijn modellen en methoden in discrete tijd en in continue tijd grotendeels onafhankelijk van elkaar ontwikkeld. Inhoudelijk hebben ze veel gemeen en er is dan ook alle reden om ze als complementaire benaderingen voor dezelfde toegepaste problemen in te zetten.

Het onderzoeksproject beoogt deze knelpunten langs drie lijnen op te lossen. Ten eerste bestuderen we dynamische discrete keuzemodellen waarbij de baten van de verschillende keuzen afhangen van een Lévy-proces in continue tijd. In Abbring (2010; 2012) is de meest eenvoudige variant hiervan beschreven, een optimal-stopping-model dat kan worden toegepast op de analyse van bijvoorbeeld baanduren, werkloosheidsduren of huwelijksduren van heterogene individuen en koppels. Bijvoorbeeld, in de toepassing op huwelijksduren varieert het huwelijksgeluk als een Lévy-proces dat de echtgenoten wel waarnemen maar de econometrist niet. Onder bepaalde voorwaarden zal het stel scheiden zodra het huwelijksgeluk door een ondergrens zakt die van koppel tot koppel verschilt: koppels die goed in de huwelijksmarkt liggen en weinig morele bezwaren tegen scheiden hebben zullen een kleinere tolerantie voor huwelijksongeluk hebben dan koppels die gedoemd zijn om de rest van hun leven alleen te slijten. In Abbring (2012) staan exacte voorwaarden waaronder de stochastische eigenschappen van het latente geluksproces en de heterogeniteit in de ondergrens die koppels hanteren, kunnen worden bepaald uit gegevens over scheidingsduren en eigenschappen van getrouwde stellen. Hierbij maak ik dankbaar gebruik van een analogie met de analyse van het MPH-model. Een complicatie bij het werkelijk toepassen van het model is dat het, in het algemeen, geen expliciete uitdrukking oplevert voor de verdeling van de (huwelijks-)duren. We hebben inmiddels echter een effectieve numerieke procedure ontwikkeld voor het berekenen van deze verdeling; op haar beurt maakt die het mogelijk het model empirisch te onderzoeken met statistische methoden die een uitdrukking voor deze verdeling vereisen. De volgende stap is om deze resultaten uit te breiden naar het soort herhaalde en meervoudige keuzen dat met modellen in discrete tijd kan worden bestudeerd. We kunnen daarbij bogen op de omvangrijke theoretische literatuur, maar ook op de analogie met de analyse van het MPH-model. In het bijzonder kijken we in hoeverre deze modellen te identificeren en schatten zijn met op discrete momenten gemeten of over intervallen gemiddelde gegevens en verbinden zo deze lijn van onderzoek expliciet met de meer gangbare benadering in discrete tijd.

Ten tweede onderzoeken we varianten van deze modellen met strategische interacties. In eerste instantie gaat het daarbij om twee eenvoudige standaardmodellen. Het eerste is een uitbreiding van het synchronisatiespel van Honoré en De Paula (2010) met baten die niet zeker zijn maar afhangen van een Lévy-proces. Het tweede model is een eenvoudig voorbeeld van een optimal-stopping-spel waarin, anders dan in een synchronisatiespel, het voortzetten van een activiteit door een speler juist aantrekkelijker wordt naarmate meer andere spelers gestopt zijn: een *war of attrition*. Hierin besluiten twee bedrijven over het verlaten van een stochastisch krimpende markt. Elk van de bedrijven wil graag dat het andere de markt eerst verlaat; de vraag is of bedrijven hierdoor te lang in de markt blijven. Onderzoek tot dusver laat zien dat de evenwichtsstrategieën van deze spelen erg veel weg hebben van de

optimale beslisregels in de keuzemodellen in Abbring (2012), zodat de resultaten voor die modellen kunnen worden toegepast op deze spelen. Het plan is om de econometrie van deze twee eenvoudige spelen eerst volledig te ontwikkelen en om vervolgens te onderzoeken of er ook spelen met ingewikkeldere stochastische en strategische specificaties geanalyseerd kunnen worden.

Tot slot is een parallelle ontwikkeling in discrete tijd voorzien. Allereerst bekijken we keuzemodellen in discrete tijd waarin de baten van verschillende keuzen afhangen van een proces dat de agent wel, maar de econometrist niet waarneemt. Inhoudelijk lijken deze modellen erg op de keuzemodellen in continue tijd, maar de analyse maakt gebruik van ideeën in Abbring en Campbell (2005).

Verder krijgt de econometrie van dynamische spelen aandacht, en dan vooral het dynamische oligopolie-model van Ericson en Pakes (1995). Uitgangspunt is dat deze literatuur met Ericson en Pakes een enorme sprong heeft gemaakt van statische en beschrijvende dynamische modellen naar een uiterst ambitieus raamwerk dat moeilijk te hanteren is. Het project maakt hier vooruitgang door eerst sterke resultaten te ontwikkelen voor eenvoudigere modellen die de literatuur heeft overgeslagen. Deze resultaten zijn voldoende voor sommige toepassingen en kunnen in andere gevallen dienen als een opstapje naar de analyse van complexere modellen. In Abbring en Campbell (2010) is beschreven dat een variant van het model van Ericson en Pakes zonder productiviteitsschokken, en dus zonder investeringen daarin, een uniek evenwicht heeft dat eenvoudig en snel berekend kan worden. Abbring *et al.* (2013) laten zien dat modellen die wel productiviteitsschokken toelaten, maar geen investeringen daarin, doorgaans meerdere evenwichten kunnen hebben, maar dat deze wel allemaal snel berekend kunnen worden. Op dit moment onderzoeken we in hoeverre deze resultaten behulpzaam zijn bij de analyse van een markt waarin bedrijven ook investeren in productiviteitsverschillen, zoals in Ericson en Pakes.

Inmiddels hebben we econometrische methoden ontwikkeld voor varianten van onze modellen zonder productiviteitsschokken, waarbij we een benadering volgen als in Rust (1987). De volgende stap is om algemenere modellen, zoals dat van Abbring *et al.* (2013), empirisch inhoud te geven.

## CONCLUSIE

De eerste resultaten van het project tonen aan dat er veel vooruitgang kan worden geboekt in de theorie, berekening en econometrie van dynamische discrete keuzen en spelen. De methoden in Abbring *et al.* (2013) maken het bijvoorbeeld mogelijk om, voor gegeven primitieven, snel veel beleidsopties door te rekenen in het mededingings- en innovatievoorbeeld aan het begin van dit artikel. Verder onderzoek zal het empirisch kwantificeren van de benodigde primitieven vergemakkelijken en vergelijkbare methoden voor algemenere, minder gestileerde problemen opleveren. Als onderdeel van het project zal computercode en ander bronmateriaal publiek beschikbaar worden gemaakt. Dit zal toegepaste onderzoekers in staat stellen de ontwikkelde methoden te gebruiken voor, bijvoorbeeld, de kwantitatieve en empirische analyse van de structuur en werking van markten. De hoop en verwachting is dat het project zo zal bijdragen aan een beter begrip van, bijvoorbeeld, het mededingingsbeleid.

## LITERATUUR

- Abbring, J.H. (2010) Identifying dynamic discrete choice models. *Annual Review of Economics*, 2(september), 367–394.
- Abbring, J.H. (2012) Mixed hitting-time models. *Econometrica*, 80(2), 783–819.
- Abbring, J.H. en J.R. Campbell (2005) A firm's first year. *Tinbergen Discussion Paper*, 05(046/3).
- Abbring, J.H. en J.R. Campbell (2010) Last-in first-out oligopoly dynamics. *Econometrica*, 78(5), 1491–1527.
- Abbring, J.H., J.R. Campbell en N. Yang (2013) *Simple Markov-perfect industry dynamics*. Intern werkdocument.
- Abbring, J.H. en J.J. Heckman (2007) Econometric evaluation of social programs, part III: distributional treatment effects, dynamic treatment effects and dynamic discrete choice, and general equilibrium policy evaluation. In: Heckman, J.J. en E. Leamer (red.) *Handbook of Econometrics*, vol. 6B, Amsterdam: North-Holland, 5145–5303.
- Akerberg, D., C.L. Benkard, S.T. Berry en A. Pakes (2007) Econometric tools for analyzing market outcomes. In: Heckman, J.J. en E. Leamer (red.) *Handbook of Econometrics*, vol. 6A, Amsterdam: North-Holland, 4171–4276.
- Alvarez, F. en R. Shimer (2011) Search and rest unemployment. *Econometrica*, 79(1), 75–122.
- Berg, G.J. van den (2001) Duration models: specification, identification, and multiple durations. In: Heckman, J.J. en E. Leamer (red.) *Handbook of Econometrics*, vol. 5, Amsterdam: North-Holland, 3381–3460.
- Dixit, A.K. en R.S. Pindyck (1994) *Investment under uncertainty*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Doraszelski, U. en K.L. Judd (2005) Avoiding the curse of dimensionality in dynamic stochastic games. *Harvard Institute of Economic Research Working Paper*, 2005.
- Doraszelski, U. en A. Pakes (2007) A framework for applied dynamic analysis in IO. In: Armstrong, M. en R.H. Porter (red.) *Handbook of Industrial Organization*, vol. 3, Amsterdam: North-Holland, 1887–1966.
- Eckstein, Z. en G.J. van den Berg (2007) Empirical labor search: a survey. *Journal of Econometrics*, 136(2), 531–564.
- Ericson, R. en A. Pakes (1995) Markov-perfect industry dynamics: a framework for empirical work. *Review of Economic Studies*, 62(1), 53–82.
- Flinn, C. en J.J. Heckman (1982) New methods for analyzing structural models of labor force dynamics. *Journal of Econometrics*, 18(1), 115–168.
- Honoré, B.E. en Á. de Paula (2010) Interdependent durations. *Review of Economic Studies*, 77(3), 1138–1163.
- Keane, M.P. en K.I. Wolpin (2009) Empirical applications of discrete choice dynamic programming models. *Review of Economic Dynamics*, 12(1), 1–22.
- Lancaster, T. (1979) Econometric methods for the duration of unemployment. *Econometrica*, 47(4), 939–956.
- Miller, R.A. (1984) Job matching and occupational choice. *Journal of Political Economy*, 92(6), 1086–1120.
- Pakes, A. (1986) Patents as options: some estimates of the value of holding European patent stocks. *Econometrica*, 54(4), 755–784.
- Paula, Á. de (2009) Inference in a synchronization game with social interactions. *Journal of Econometrics*, 148(1), 56–71.
- Rust, J. (1987) Optimal replacement of GMC bus engines: an empirical model of Harold Zurcher. *Econometrica*, 55(5), 999–1033.
- Rust, J. (1994) Structural estimation of Markov decision processes. In: Engle, R. en D. McFadden (red.) *Handbook of Econometrics*, vol. 4, Amsterdam: North-Holland, 3081–3143.
- Stokey, N.L. (2009) *The economics of inaction: stochastic control models with fixed costs*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Wolpin, K.I. (1984) An estimable dynamic stochastic model of fertility and child mortality. *Journal of Political Economy*, 92(5), 852–874.