

Enige statistische aspecten van kansspelen

DR. J. F. M. KOLK *

In dit artikel passeren de statistische aspecten van de verschillende gok- en kansspelen kort de revue. De auteur maakt onderscheid tussen „zuivere” kansspelen zoals de lotto en de staatsloterij en spelen waarbij kennis van zaken een rol speelt (de paardentoto en de sporttoto). Concluderend stelt de auteur dat de speler bij beide vormen van kansspel altijd geld inlevert. De enige winnaars zijn de exploitanten.

Inleiding

Gok en kansspelen zijn al zeer oud. Immers, op de lagere school werden ons reeds verhalen verteld en platen getoond over onze dobbelende voorouders, de Batavieren. Gezien deze verhalen ging het hier om een spel waarbij haver en gort, ja zelfs de eigen vrijheid werd vergokt en de gokker zich zelfs tot slavernij liet brengen. Hierbij zullen echter geen perfecte dobbelstenen gebruikt zijn, zoals we ze nu hebben. Van „gelijke” kansen was daardoor geen sprake. In dit artikel wil ik graag iets toelichten over kansen bij het gokken 1). Ik wil niet de weg van de mathematische voorstelling bewandelen, maar met u proberen langs het pad van de logica, „het gezonde verstand” te lopen.

Eerst nog even het volgende. Indien niet nadrukkelijk anders vermeld zal ik uitgaan van perfect spelmateriaal waarbij elke mogelijke uitkomst van het spel een gelijke kans van voorkomen heeft. Ik zal het dus hebben over een perfecte dobbelsteen, een ideale roulette en ervan uitgaan dat alle balletjes in de lottomachine even zwaar zijn.

De eerste gok waarmee ik zelf geconfronteerd ben in mijn jeugd was de „toss” van de scheidsrechter. Hierbij zijn er twee mogelijke uitkomsten: kruis of munt. Dit is tevens op dit moment in gebruik als gokspelletje. Twee spelers nemen ieder een munt, b.v. een rijksdaalder, en tossen. Bij gelijke uitkomst wint A; bij ongelijke uitkomst wint B. Om na te gaan wat de kansen voor A en B zijn stellen we een tabel op met alle mogelijke uitkomsten:

Speler A	Speler B	Winst voor
munt	munt	A
munt	kruis	B
kruis	munt	B
kruis	kruis	A

A en B hebben ieder twee uit vier mogelijkheden; gelijke kansen dus. Een onschuldig spel waarbij de winnaar de twee munten incasseert.

Overigens zullen we voorzichtig moeten zijn met onze logica en ervoor waken dat in de voorwaarden vooraf geen kansen extra worden ingebracht danwel worden weggenomen. Een voorbeeld hiervan is het trekken van munten uit twee laadjes. Het voorbeeld gaat als volgt: „Ik heb twee gesloten laadjes. Een ervan bevat een gouden en een zilveren munt; het andere twee gouden. Ik trek een laadje open en trek een gouden munt zonder te kunnen zien wat de andere is. Wat is de kans dat de andere munt in dat laadje een gouden munt is?” Overdenkt u dit even voor u een antwoord geeft. „Mis” zeg ik tot diegenen die tot een kans van 50% komen. De volgende tabel laat dit zien.

z^1	g^2
-------	-------

g^3	g^4
-------	-------

We lopen wederom alle mogelijkheden af:

Stel u trok als eerste: munt 2, de ander is zilver dus fout;
munt 3, de ander is goud dus goed;
munt 4, de ander is goud dus goed.

Van de drie oplossingen zijn er twee goed. Derhalve is de oplossing van het probleem $66 \frac{2}{3}\%$. Dit komt omdat reeds een voorwaarde vooraf is ingebouwd, namelijk dat u niet als eerste de zilveren munt hebt getrokken. Eén van de vier mogelijkheden voor de start is daarmee vervallen. Laten we met deze „logica” in het achterhoofd de in dit themanummer van *ESB* behandelde onderwerpen de revue laten passeren.

De sporttoto

Bij de sporttoto hebben we direct al te maken met een voorbeeld waarbij de kansen niet gelijk zijn. Bij de wedstrijd Ajax-Helmond Sport is, gezien de stand op de ranglijst en het feit dat Ajax thuis speelt, de waarschijnlijkheid dat het resultaat „1” is, veel groter dan „2”. Het resultaat wordt dus nadrukkelijk beïnvloed door de expertise van de gokker, hoewel „verrassingen” vaak voorkomen.

Naarmate de uitslagen meer en meer voldoen aan het op te stellen verwachtingspatroon zal er een „groot” aantal winnaars (experts) zijn. Des te meer verrassingen, des te vaker is het aantal winnaars klein, soms slechts één, die na afloop bovendien vertellen dat ze de toto lukraak hebben ingevuld. „Hoeveel rijtjes moet ik invullen om zeker te zijn dat het goede erbij is” is een vaak gehoorde vraag. Stel dat de toto bestaat uit één wedstrijd, dan hebben we drie mogelijkheden. Indien de toto bestaat uit

* De auteur is werkzaam bij de Dienst voor het IJkwezen.

1) Voor meer literatuur over kansen en gokken in het algemeen, zie: Wijvekate, *Verklarende Statistiek*, Aula, nr. 39; Moroney, *Facts from figures*, Pelican, nr. A 236; Mood en Graybill, *Introduction to the theory of statistics*, McGraw-Hill; Brandt, *Statistical and computational methods in data analysis*, NHPC. Voor specifieke onderwerpen, zie: Epstein, *The theory of gambling and statistical logic*, AP; Cornish, *Gambling: a review of the literature*, Home Office Research Study nr. 42; Vermeent, *Kaarten op tafel*, Elsevier; Gallast, *Wet op de kansspelen*, Schuurman & Jordens, nr. 69.

twee wedstrijden krijgen we de volgende tabel van (verticale) getallencombinaties:

111	222	333
123	123	123

We zien 3 x 3 mogelijkheden.

Voor drie wedstrijden vinden we 3 x 3 x 3 mogelijkheden:

11111111	22222222	33333333
11122333	11122333	11122333
123123123	123123123	123123123

U begrijpt het al: voor 13 wedstrijden is het resultaat 3¹³; of wel 1.594.323 mogelijkheden. Indien u op elk formulier twaalf kolommen invult zult u 132.861 formulieren nodig hebben. Uiteraard een absurde hoeveelheid. Als dit aantal aanmerkelijk kleiner was geweest, had een slimmerik dit allang uitgevoerd. Het aantal benodigde formulieren zakt namelijk erg snel. Voor de eerst acht goed zijn „slechts” 6.561 kolommen nodig, of wel 547 formulieren. In de praktijk zal echter het grootste deel van het publiek zijn expertise laten bepalen wat er ingevuld wordt.

De lotto

Bij de lotto hebben we te maken met een zuiver kansspel. Bij de lotto worden zes cijfers ingevuld op 41 mogelijkheden. Wat zijn nu de kansen?

De kans op 1 goed (direct bij trekking van het eerste balletje): er zijn 6 mogelijkheden uit 41; de kans is dus 6/41. De kans op 2 goed (weer opvolgend) is een vervolg op 1 goed: als u 1 goed heeft, heeft u nog 5 mogelijkheden uit de overige 40 lottocijfers. Immers, er is al 1 cijfer aangekruist als goed. De kans dat ook de tweede goed is, is dan ook 5/40 na de kans op 1 goed. Daarmee is kans op 2 goed: 6/41 x 5/40.

In tabelvorm ziet dit er als volgt uit.

Aantal cijfers goed	Kans	Kans in procenten
1	$\frac{6}{41} = 6/41$	14,6
2	$\frac{6}{41} \times \frac{5}{40} = 30/1640$	1,83
3	$\frac{6}{41} \times \frac{5}{40} \times \frac{4}{39} = 120/63960$	0,187
4	$\frac{6}{41} \times \frac{5}{40} \times \frac{4}{39} \times \frac{3}{38} = 360/2430480$	0,015
5	$\frac{6}{41} \times \frac{5}{40} \times \frac{4}{39} \times \frac{3}{38} \times \frac{2}{37} = 720/ \dots$	0,0008
6	$\frac{6}{41} \times \frac{5}{40} \times \frac{4}{39} \times \frac{3}{38} \times \frac{2}{37} \times \frac{1}{36} = 720/ \dots$	0,00002

De kans op 6 goed is dus 1 op 4,5 mln. Als u twaalf kolommen invult is de kans op 6 goed dus 1 op 375.000. Het berekenen van de overige kansen met behulp van „logisch” denken is gecompliceerder. In de in voetnoot 1 genoemde literatuur kunt u de berekeningsmethoden hiervoor vinden 2).

De paardenlotto

Bij de paardenlotto is expertise een nog wezenlijker element van het gokken dan bij de voetbaltoto. Het supertrio is een wedenschap die over het algemeen wordt gemaakt met de kennis over paarden, terrein en ridders, Indien een startveld bestaat uit zestien paarden is de kans dat een bepaald paard op een bepaalde plaats eindigt als alle paarden even sterk en alle ridders even slim zijn uiteraard 1 op 16. Voor de plaatsen 1, 2 en 3 in juiste volgorde is de kans dan $1/16 \times 1/16 \times 1/16 = 1$ op 4.096. Zo eenvoudig is het echter niet, aangezien we te maken hebben met favorieten en outsiders waardoor kansen niet even groot zijn. Een trio met drie favorieten zal een grotere waarschijnlijkheid hebben dan 1 op 4.096. Daarentegen heeft een supertrio met een outsider erin veel kleinere kansen. In het laatste geval zal het aantal juiste voorspellers veel kleiner zijn en daarmee de uitkering per juiste wedenschap ook veel groter.

Staatsloterij

Bij de Staatsloterij kunt u met één lot aan drie trekkingen meedoen. Volgens art. 6 van de beschikking met betrekking tot de Staatsloterij bevatten de drie trekkingen per serie van 100.000 loten het volgende aantal prijzen: trekking 1 en 2 : 12.417; trekking 3 : 15.319. Daarnaast worden nog zes extra prijzen uitgeloot en voor die series waarin deze zes hoofdprijzen niet vielen, zes troostprijzen per serie. Totaal worden per serie dus uitgeloot 12.423, 12.423 en 15.325 prijzen. De kans op een prijs, variërend tussen f. 10 en f. 500.000 is:

- serie 1 : 12.423 op 100.000 = 1 op 8,05;
- serie 2 : 12.423 op 100.000 = 1 op 8,05;
- serie 3 : 15.325 op 100.000 = 1 op 6,53.

Aangezien een lot gedurende de drie trekkingen geldig blijft is de totale kans op een prijs een optelling van de individuele kansen: 1 op 2,49. Uiteraard is de kans op een kleine prijs (f. 10, f. 15, en f. 25) veel groter dan de kans op een grote prijs, b.v. f. 150.000. De kans op een kleine prijs (eindcijfer goed) is in elke serie 1 op 10 en daarmee in totaal dus 3 op 10 (1 op 3,33). f. 50.000 wordt echter slechts één maal getrokken in de tweede trekking en slechts één maal in de derde trekking. Per keer een kans van 1 op 100.000; totaal dus 1 op 50.000. Aan de hand van het prijzenschema kan voor elke prijs de kans worden bepaald. Voor een prijs van f. 100 is de kans: 200 op 100.000 in eerste en tweede trekking en 1.000 in de derde; totaal dus 1.400 op 100.000, is gelijk aan 1 op 71,4. De kans op de hoofdprijs is afhankelijk van het aantal series. Voor x series is de kans 1 op x 0.000.

Casino's

In de Nederlandse casino's worden met name twee spelsoorten beoefend: black jack en roulette.

Wat betreft black jack wil ik in het kader van dit artikel slechts opmerken dat de uitkomst van dit kansspel door de speler te beïnvloeden is door op strategische momenten hoog, dan wel laag in te zetten en wel of niet nog kaarten bij te nemen. In de loop der tijd zijn voor dit kansspel systemen ontwikkeld waarbij de speler tot 95% van zijn inzetten gemiddeld weer terugverdient. Zelfs is het zo, dat zeer geoefende en getrainde spelers, z.g. „cardcounters” boven 100% kunnen uitkomen. In de vermelde literatuur is hierover voldoende na te lezen.

De roulette is statistisch gezien een eenvoudig instrument: 36 nummers plus een 0 geven 37 mogelijke uitkomsten. Voor de kansen per inzet kunnen we de volgende tabel opstellen:

Inzet op:	Uitkering incl. inzet	Kans	Gemiddeld verlies
1 nummer	36	1/37	1-36 · 1/37 = 1/37 = 2,7%
2 nummers	18	2/37	1-18 · 2/37 = 1/37
3 nummers	12	3/37	1-12 · 3/37 = 1/37
4 nummers	9	4/37	1-9 · 4/37 = 1/37
6 nummers	6	6/37	1-6 · 6/37 = 1/37
12 nummers	3	12/37	1-3 · 12/37 = 1/37
24 nummers	1½	24/37	1-3/2 · 24/37 = 1/37
Enkelvoudige kans a)	2	18/37	1-74

a) Indien de 'nul' uitkomt zijn er bij de enkelvoudige kans twee mogelijkheden:
 a. de speler staat de halve inzet af;
 b. als bij de volgende draai niet de '0' komt krijgt hij zijn inzet terug als zijn inzet winnend is.
 In geval de '0' wederom komt wordt dezelfde kans geboden nadat de halve inzet is ingenomen. De derde '0' verliest definitief.
 Hierdoor wordt het verlies bij de enkelvoudige kans kleiner.

Gemiddeld gezien int het casino dus van elke speler 2,7% van zijn inzet, behalve als op enkelvoudige kansen wordt gespeeld, dan is dit de helft van dit bedrag te weten 1,35%.

De roulette zal zeker moeten voldoen aan de wet der grote getallen, d.w.z. dat op den duur elk nummer even vaak valt. Het is echter een fabeltje dat als b.v. nr. 12 al zestig keer niet gevallen

2) De kans op „een” kruisje goed kan nog eenvoudig worden nagegaan. Bij het eerste balletje is de kans 6/41. Bij het tweede balletje heeft u 6 uit 40 kansen; immers 1 balletje is uit de bol verdwenen. Bij de zes trekkingen is de kans dat ten minste 1 kruisje juist is: $6/41 + 6/40 + 6/39 + 6/38 + 6/37 + 6/36 = 0,937$ dus 93,7%.

is, de kans dat deze valt erg groot is, Een roulettencylinder heeft immers geen geheugen. Iedere keer opnieuw is de kans op een bepaald nummer 1 op 37 en de kans op rood of zwart 18 op 37. De kans op b.v. twee keer rood na elkaar is nog altijd $23,7 (18/37 \times 18/37)$ en de kans op vijf keer rood na elkaar 2,7%.

Als een casino een roulette twaalf uur op een dag voor de spelers ter beschikking heeft en het draaitempo één draai per drie minuten is kunnen in totaal 240 spellen worden gespeeld. Deze 240 spellen betrokken op 37 mogelijke uitkomsten is een veel te klein aantal om op statistische gronden iets van een roulette te zeggen. Het is dan ook zeer de vraag of de „noteerders” aan de roulettetafel hun kansen daarmee vergroten. Eerder zal een consequente speelmethode het verlies tot 2,7% kunnen beperken.

Speelautomaten

Voor speelautomaten zijn winst- en verlieskansen afhankelijk van het aantal rollen of walsen in de automaat en het aantal symbolen per rol. Voor één rol met twintig symbolen is de kans op het voorkomen van ieder symbool 1 op 20. Voor de combinatie van vier rollen is de kans dat de machine dusdanig stopt dat elke rol b.v. op positie 1 staat, dan ook $1/20 \cdot 1/20 \cdot 1/20 \cdot 1/20 = 1/160.000$.

In de huidige praktijk vinden we nog zeer oude automaten met drie rollen waarop tien symbolen staan. Duitse automaten met b.v. drie walsen met 10, 12 en 10 symbolen, maar de meest gangbare is toch de automaat met vier rollen van ieder twintig symbolen. Er zijn zelfs al machines met vierentwintig symbolen per rol. Deze uitbreiding met vier symbolen verdubbelt het aantal mogelijkheden:

Aantal symbolen	Aantal rollen		
	3	4	5
10	1.000	10.000	100.000
10/12/10	1.200		
20	8.000	160.000	3.200.000
24	13.824	331.776	7.962.624

In Las Vegas staat zelfs een machine met acht rollen van twintig symbolen. Indien elk spel drie seconden duurt zou er 2.435 jaar continu gespeeld moeten worden om elke combinatie één maal te laten voorkomen.

Veelal zullen echter op een rol een aantal symbolen vaker voorkomen. Om het uitkeringspercentage vast te stellen bij blind spel, dat wil zeggen dat de speler het resultaat niet beïnvloedt, kan dan een uitkeringstabel worden opgesteld. Voor de bij de Dienst van het IJkwezen aangeboden automaten wordt dit verwerkt met behulp van een computerprogramma. Ter illustratie wil ik hier het voorbeeld behandelen van een eenvoudige machine met drie rollen met tien symbolen zonder „hold”-faciliteiten. Daarvoor hebben we nodig het prijzenschema en het voorkomen van de symbolen op elke rol.

Winplan:	Rolsymbolen:
Kers — — = 2	1 Joker Joker Joker
Kers Kers — = 5	2 Hartje Hartje Pruim
Kers Kers Kers = 10	3 Bel Kers Kers
— Kers Kers = 5	4 Hartje Ster Ster
— — Kers = 2	5 Sinas Pruim Bel
Hartje Hartje — = 2	6 Kers Sinas Sinas
Sinas Sinas Sinas = 10	7 Sinas Pruim Citroen
Pruim Pruim Pruim = 14	8 Pruim Hartje Bel
Bel Bel Bel = 18	9 Citroen Bel Kers
Ster Ster Ster = 20	10 Ster Pruim Citroen
Joker Joker Joker = 20	

Totaal aantal combinaties: 1.000

Om een uitkering uit te rekenen nemen we weer het produkt der enkelvoudige kansen. B.v. de kans dat „Kers Kers —” voorkomt is: het aantal malen kers op rol 1 maal aantal malen kers op rol 2 maal aantal malen *niet* kers op rol 3. Uiteraard in alle gevallen gedeeld door 1.000. De uitkeringstabel ziet er als volgt uit:

Combinatie	Kans	Prijs	Totaal
Kers — —	= $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$	2	144
— — Kers	= $9 \cdot 9 \cdot 2 = 162$	2	324
Kers Kers —	= $1 \cdot 1 \cdot 8 = 8$	5	40
— Kers Kers	= $9 \cdot 1 \cdot 2 = 18$	5	90
Kers Kers Kers	= $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$	10	20
Hartje Hartje —	= $2 \cdot 2 \cdot 10 = 40$	2	80
Sinas Sinas Sinas	= $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$	10	20
Pruim Pruim Pruim	= $1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$	14	42
Bel Bel Bel	= $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$	18	36
Ster Ster Ster	= $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$	20	20
Joker Joker Joker	= $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$	20	20
			836

Betrokken op 1.000 mogelijkheden heeft deze automaat dus een uitkering van 83,6%.

Slotopmerkingen

Gelet op de hier gepresenteerde gegevens kunnen we concluderen dat gemiddeld gesproken de speler altijd geld inlevert. Het kleinste verlies wordt nog geleden bij de spelvormen in de casino's. Bij lotto, toto en paardentoto wordt een deel van de gelden besteed voor andere doelen en vindt ook een grotere afroming plaats die kan oplopen tot 30 à 40%. Bovendien is duidelijk dat naarmate de inzet/prijs-verhouding groter wordt, de kans op prijs kleiner wordt.

Als u speelt om zich te amuseren, akkoord. Speel nooit om te winnen. De enige winnaars zijn namelijk diegenen die de spellen exploiteren 3).

J. F. M. Kolk

3) Een beroemde uitspraak van de heer Blanc, stichter van het casino in Monte Carlo, in antwoord op een speler die vroeg op welke kleur hij het best kon spelen, „rood” of „zwart” was: „Monsieur, rouge gagne de temps et noir gagne de temps en temps mais blanc gagne toujours”, met dit laatste uiteraard zich zelf bedoelend.